UMA INTRODUÇÃO AS GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANAS - TÓPICOS EM GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Fernando da Costa Gomes (bolsista do PIBIC-UFPI), Newton Luis Santos (Orientador, Dep. de Matemática-UFPI)

Introdução

A geometria Hiperbólica constitui uma das geometrias não Euclidianas. Seu postulado característico é que *dados uma reta e um ponto que não pertence a essa reta, então existe mais de uma reta paralela à reta dada passando por esse ponto*. Adotando-se este postulado, surgem resultados inesperados e bastante curiosos em relação à geometria Euclidiana.

Metodologia

Neste trabalho foram estudados os fundamentos da Geometria Hiperbólica buscando comparar com os correspondentes resultados Euclidianos: relações básicas envolvendo figuras hiperbólicas elementares como círculos, triângulos e quadriláteros e outras mais complexas, como horocírculos, curvas equidistantes e triângulo de área maximal, deduzindo de cada uma delas as suas principais propriedades foram considerados. A fim de garantir a consistência de todos esses resultados, exibimos um modelo para a Geometria Hiperbólica.

Resultados e Discussão

Postulado *Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não encontram a reta dada.*

Teorema *Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é, em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.*

Teorema *Se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela á primeira*.

Teorema *Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas entre si.*

Por questões de simplicidade, introduzimos a noção de *ponto ideal:* pontos que se localizam no infinito e que são acrescentados às retas de modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo. Pontos ideias serão denotados pela letra Ω.

Como decorrência da idéia de ponto ideal, temos os *triângulos generalizados,* formados por dois vértices que são pontos ordinários e um que é ponto ideal ou por dois vértices que são pontos ideais e um vértice, ponto ordinário.

Teorema *Se uma reta penetra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então ela corta o lado oposto a este vétice.*

Teorema *Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.*

Casos de congruência dos triângulos generalizados

Caso 1: *Se $AB = A`B`$ e $B\hat{A}\Omega = B`\widehat{A`}\Omega`$, então $AB\Omega = A`B`\Omega`$*

Caso 2: *Se $A\hat{B}\Omega = A`\widehat{B`}\Omega`$ e $B\hat{A}\Omega = B`\widehat{A`}\Omega`$, então, $AB\Omega = A`B`\Omega`$.*

Caso 3: *Se $AB = A`B`$, $A\hat{B}\Omega = B\hat{A}\Omega$ e $A`\hat{B}`\Omega` = B`\widehat{A`}\Omega`, então, AB\Omega = A`B`\Omega`$.*

Quadriláteros especiais

Quadriláteros de Saccheri: É todo quadrilátero $ABCD$ no qual $AB = CD$ e os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são retos.

Quadriláteros de Lambert: É todo quadrilátero que possui três ângulos retos e um agudo.

Teorema *A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Teorema *Duas retas que não se interceptam têm uma e somente uma perpendicular em comum.*

Os pontos ultra-ideais constituem uma nova família de pontos e serão adicionados aos pontos ideais e ordinários segundo a seguinte regra:

> *Em uma reta n serão acrescentadas os pontos ultra-ideais* Γ_m , *onde m é qualquer reta perpendicular a n.*

Como conseqüência dessa regra e do teorema anterior, duas retas que não se intersectam tem exatamente uma perpendicular em comum.

Com essas definições e propriedades, podemos observar que na Geometria Hiperbólica, diferentemente da Geometria Euclidiana, dadas duas retas quaisquer elas sempre se intersectam. O ponto comum a elas pode ser:

1. Ordinário (retas concorrentes)
2. Ideal (retas paralelas)
3. Ultra-ideal (retas que não se intersectam).

A partir dessas noções elementares, podemos estender muitas propriedades para polígonos e círculos e, por conseguinte, somos capazes de deduzir toda uma trigonometria e estabelecer a noção de área.

Conclusão

O estudo da Geometria Hiperbólica tem grande importância no entendimento das geometrias não Euclidianas e serve para mostrar que não é simples afirmar qual a Geometria que melhor descreve o universo. Dependendo de cada situação, temos uma Geometria mais apropriada. Além disso, estudando-se Geometria Hiperbólica, entendemos melhor a lógica aplicada nas demonstrações matemáticas, seja qual for a área.

Apoio: UFPI (Universidade Federal do Piauí).

Referências Bibliográficas

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Hiperbólica*, ed. da UFG, 2002.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, SBM, 1985.

POGORELOV, Aleksei. *Geometria Elemental*, editora Mir, 1974.

FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES, Nilson C., *Introdução às Funções de uma Variável Complexa,* Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2008.

MLODINOW, Leonard; ALMEIDA, Enezio de, *Janela De Euclides, A - A História Da Geometria: Das Linhas Paralelas Ao Hiperespaço*, Geração Editorial, 2004.

Palavras-Chave: Geometria não euclidiana. Geometria Hiperbólica. Modelo de disco de Poincaré.